UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PERUGIA
DIPARTIMENTO DI FILOSOFIA SCIENZE SOCIALI UMANE E DELLA FORMAZIONE
Corso di Laurea in Scienze per l'Investigazione e la Sicurezza

8. RELAZIONE TRA CARATTERI

LA REGRESSIONE E LA CORRELAZIONE

Prof. Maurizio Pertichetti

Statistica sociale

8. RELAZIONE TRA CARATTERI: LA REGRESSIONE E LA CORRELAZIONE

Come si è detto, nell'analisi dei dati si è sempre più interessati a studiare se tra due o più caratteri, congiuntamente considerati sulle unità statistiche di una popolazione, vi possa essere una qualche relazione ed eventualmente quale ne possa essere la misura. Ed anche che una particolare attenzione è posta nello studio sull'esistenza di forme di dipendenza (o indipendenza) attraverso l'esplicitazione di una funzione analitica. Anche qui si limiterà l'analisi alle relazioni tra due soli caratteri.

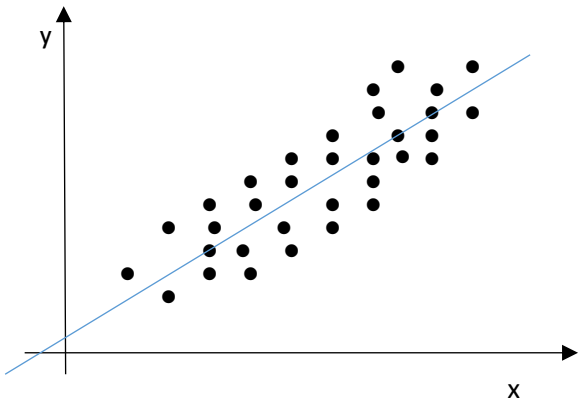
In termini assai sintetici, la correlazione informa se esiste una relazione tra le due variabili quantitative (come e quanto variano insieme), la regressione da indicazione sulla forma della loro relazione. Naturalmente il confronto tra le variabili potrà effettuarsi solo se tra di esse vi è un legame logico.

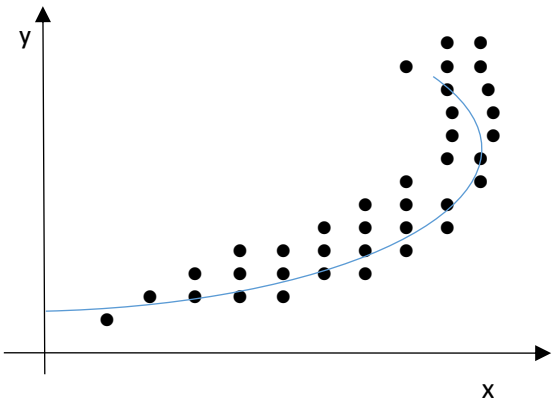
Nell'analisi statistica per **regressione** si intende la ricerca di un modello appropriato atto a descrivere la relazione esistente tra una variabile dipendente e una o più variabili indipendenti o esplicative, tutte comunque di natura quantitativa.

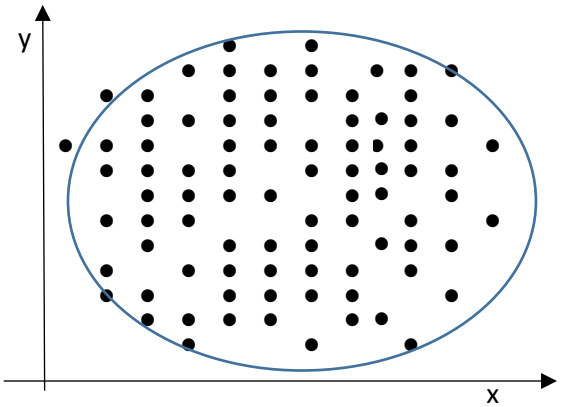
La scelta dell'una o dell'altra variabile come indipendente non è arbitraria ma legata alla natura del fenomeno, nel senso che si sceglie come indipendente la variabile che sia *logicamente antecedente* rispetto all'altra.

Per effettuare una regressione si fa riferimento a modelli teorici di vario tipo: lineare, parabolico, esponenziale, logaritmico, etc. Per cui una volta accertata l'esistenza di una relazione tra due variabili, si deve cercare di trovare la **funzione statistica**, ovvero l'espressione analitica di tale relazione sotto forma di equazione che leghi fra loro le variabili.

Per stabilire il tipo di legame tra le variabili è assai utili fare ricorso al diagramma in coordinate cartesiane, o a dispersione, o scatter plot, ossia alla rappresentazione delle **n coppie di osservazioni sulle variabili** attraverso **una nuvola di punti**.







In generale una funzione statistica è rappresentata in termini grafici da una linea, in cui si assumono come **variabili indipendenti** le modalità del carattere X, poste sull'asse delle ascisse, e come **variabili dipendenti** le corrispondenti modalità di Y, poste sull'asse delle ordinate.

Dall'analisi del diagramma a dispersione è spesso possibile avere una rappresentazione intuitiva del tipo di relazione e di conseguenza di quale modello teorico (lineare, parabolico, esponenziale, logaritmico, etc come detto) adottare.

Con il termine **interpolazione** si intende il procedimento che consente di individuare la funzione matematica che passa **per** tutti i punti dati (x,y) o **fra** di essi, ovvero che approssima l'andamento di un insieme di punti.

Il procedimento si attua sia in termini analitici che grafici:

- la **rappresentazione analitica** è data da una funzione matematica che rappresenti nel modo migliore possibile la nuvola dei punti e quindi la distribuzione osservata del fenomeno;
- la **rappresentazione grafica** consiste nel sostituire alla nuvola dei punti ovvero alla distribuzione osservata del fenomeno la *curva teorica* associata alla funzione matematica.

Per attuare una corretta rappresentazione analitica tramite un procedimento di interpolazione, si deve:

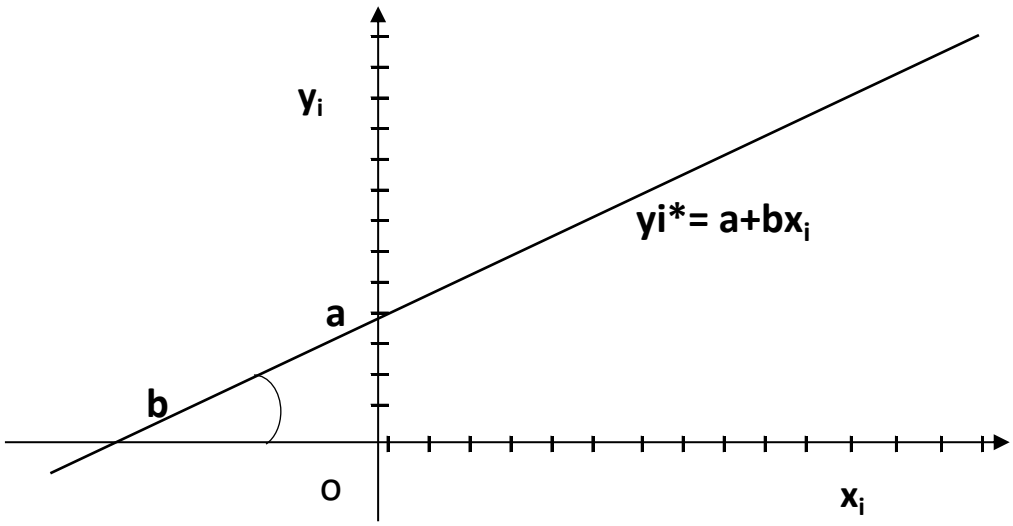
- mutuare dalla matematica una **funzione teorica**, ovvero la legge matematica in grado di rappresentare la distribuzione empirica. Questa funzione teorica, una volta trovata, sostituirà nelle diverse applicazioni la legge statistica;
- determinare il valore numerico dei **parametri** che compaiono nella funzione matematica;
- verificare il **grado di accostamento** , o se vogliamo gli scarti tra i valori teorici ottenuti con la funzione matematica e i valori empirici osservati delle frequenze o delle intensità.

Limiteremo l'analisi all'ipotesi in cui la relazione tra variabili (causa - effetto) sia di tipo lineare e pertanto che la funzione teorica atta a rappresentare tale relazione sia un'equazione di primo grado, ovvero che ad interpolare efficacemente la nuvola di punti sia una retta. La retta sarà detta **retta di regressione** e la sua equazione sarà chiamata **equazione di regressione di Y su X**.

Posta in forma esplicita, la generica equazione canonica di primo grado in due incognite della retta di regressione è data, in questo caso, da $y_i^* = a + bx_i$, dove y_i^* è il valore stimato di **Y** in corrispondenza dell'osservazione **i** di **X** e x_i è il valore empirico di **X** per la stessa osservazione **i**.

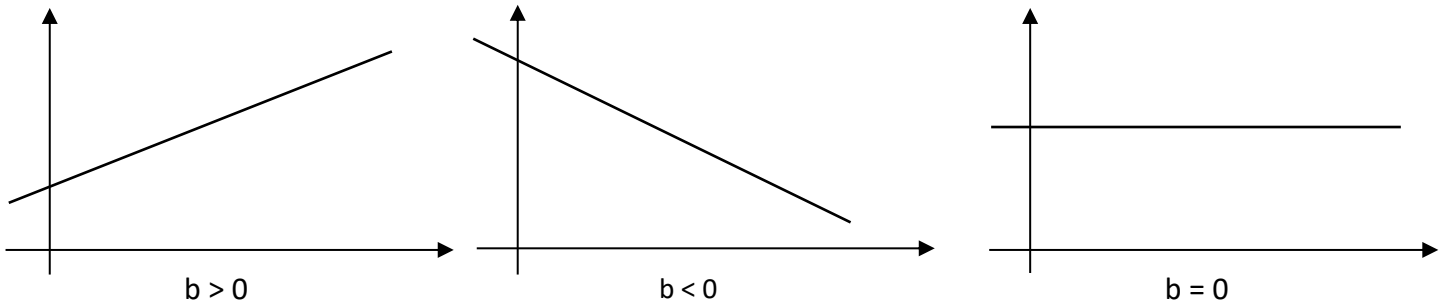
Ad ogni equazione di questo tipo, una volta assegnati i valori ad **a** e **b**, corrisponde una e una sola retta del piano cartesiano. Questi parametri cui devono essere associati numeri reali non contemporaneamente nulli rappresentano:

- **a** l'**intercetta** della retta sull'asse delle Y, ovvero il valore della Y quando X = 0 ;
- **b** il **coeficiente angolare** della retta che indica la sua pendenza, ovvero l'angolo che essa forma con l'asse delle ascisse, e fornisce la quantità di cui varia Y al variare di una unità di X.



A seconda del valore assunto dal coefficiente **b** si desume l'associazione tra X e Y, infatti se:

- $b > 0$, c'è concordanza, cioè al crescere di x anche y cresce. Vi è una correlazione lineare positiva;
- $b < 0$, c'è discordanza, cioè mentre x cresce y diminuisce. Vi è una correlazione lineare negativa;
- $b = 0$, non esiste legame lineare tra x e y.

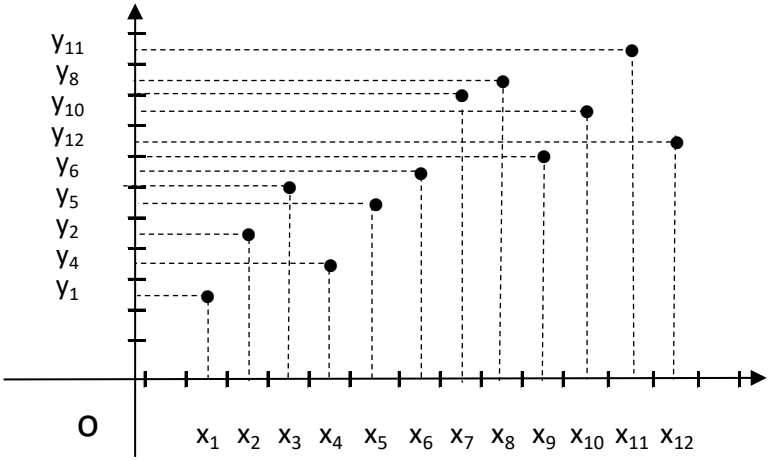


E' bene dire che l'eventuale assenza di una relazione lineare tra le variabili non implica come conseguenza la mancanza di un legame, ma solo che tra le stesse non vi è un legame lineare.

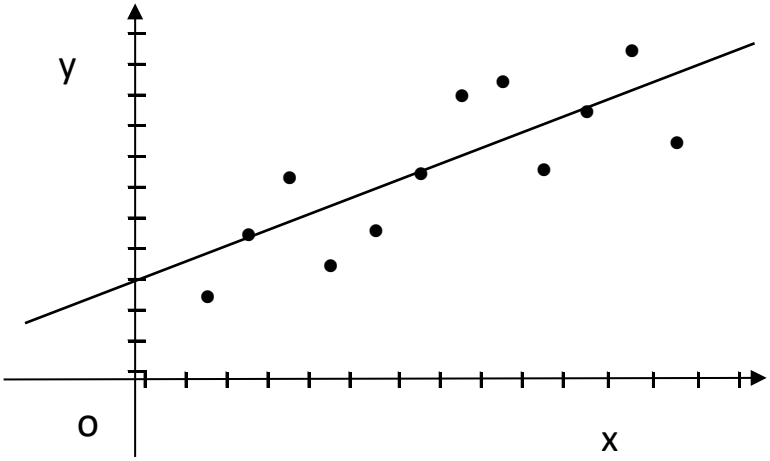
Se dunque è una retta, **retta di regressione**, il modello più appropriato in grado di descrivere la relazione tra le variabili il problema che si pone è dunque quello di individuare la coppia di parametri **a** e **b** in grado di generare la migliore retta interpolante da utilizzare.

Esistono diversi metodi per determinare i parametri di una funzione matematica in un procedimento di interpolazione, tuttavia quello più utilizzato è **il metodo dei minimi quadrati** che si definisce come quel metodo che consente di determinare valori dei parametri tali per cui la retta teorica che ne risulta ha la proprietà di *rendere minima la somma dei quadrati degli scarti tra valori teorici e valori osservati* .

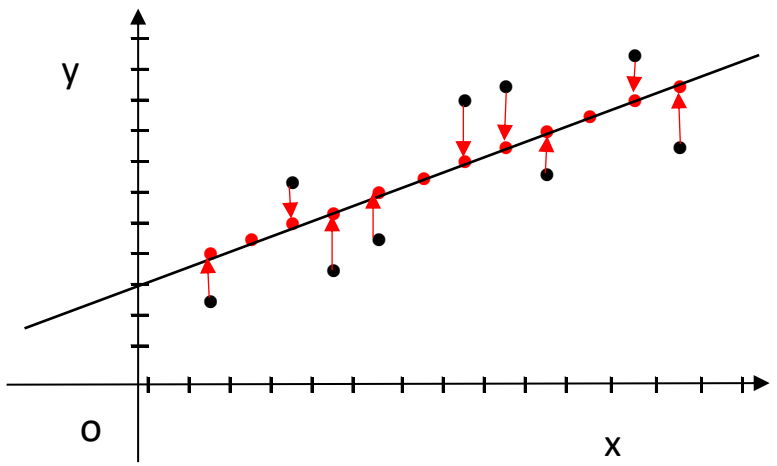
Immaginiamo di aver effettuato alcune osservazioni e di aver riportato i risultati sul un diagramma in coordinate cartesiane.



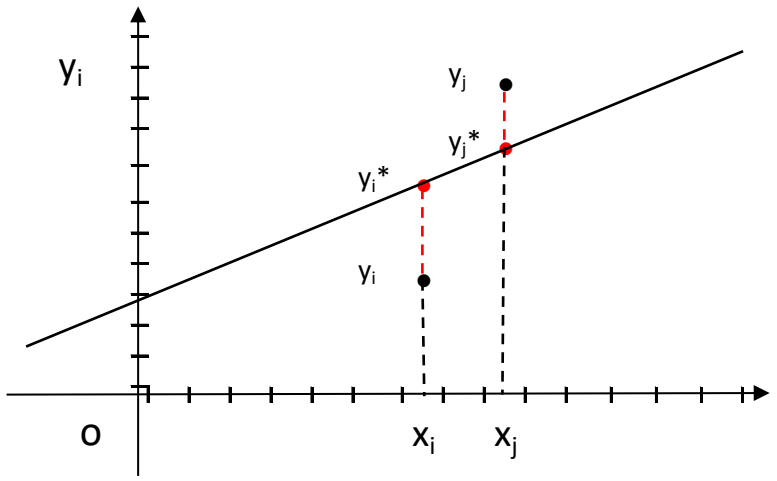
Ipotizzando l'esistenza di una relazione lineare, il problema, per descrivere tale relazione tra le variabili, è quello di individuare in maniera analitica la migliore retta interpolante.



la retta, una volta trovata, diverrà la regolarità matematica che sostituirà, o meglio dire approssimerà, l'esperienza statistica, cosicché ciascuno dei valori $\mathbf{y_i}$ delle osservazioni, ovvero della distribuzione empirica, in corrispondenza di ciascun valore di $\mathbf{x_i}$ sarà sostituito da quello teorico $\mathbf{y_i^*}$ del modello che verrà ad incrociarsi con la retta.



Avendo stabilito che per ciascun valore di $\mathbf{x_i}$, i valori teorici sono dati dalle $\mathbf{y_i^*}$, mentre i valori osservati sono dati dalle $\mathbf{y_i}$, e altresì che la funzione interpolatrice è $\mathbf{Y^* = f(x; a,b)}$, quello dei minimi quadrati è il metodo che consente di determinare i valori dei parametri di quella retta teorica in grado di rendere la $\mathbf{\sum (y_i^* - y_i)^2 = min}$, ovvero di rendere minima la somma dei quadrati degli scarti (nel grafico che segue, dove ne sono stati presi due a caso come esempio, gli scarti sono quelli evidenziati in rosso) tra valori teorici e valori osservati.



Date due variabili X e Y, se la funzione teorica è lineare, cioè del tipo $\mathbf{Y^* = a + bX}$, la teoria dimostra che i parametri **a** e **b** determinati con il metodo dei minimi quadrati corrispondono alle seguenti espressioni:

$$b = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \qquad a = \mu_y - b\mu_x$$

E si dimostra altresì che la retta dei minimi quadrati ha la caratteristica di passare per il baricentro della nuvola dei punti, baricentro che viene identificato dalle coordinate $\mathbf{(\mu_y, \mu_x)}$, ovvero le medie delle distribuzioni dei due caratteri.

Esempio di determinazione dell'equazione canonica della retta di regressione di Y su X.

x	y	xy	x^2
4	1	4	16
7	3	21	49
10	5	50	100
11	6	66	121
14	8	112	196
46	23	253	482

$\mu_x = 9{,}2$

$\mu_y = 4{,}6$

$$b = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{5*253-46*23}{5*482-(46)^2} = \frac{207{,}0}{294{,}0} = \mathbf{0{,}7041}$$

oppure $$b = \frac{\sum xy - \sum x \sum y/n}{\sum x^2 - (\sum x)^2/n} = \frac{253-(46*23)/5}{482-(46)^2/n} = \frac{253{,}0 - 211{,}6}{482{,}0 - 423{,}2} = \frac{41{,}4}{58{,}8} = \mathbf{0{,}7041}$$

$$a = \mu_y - b\mu_x = 4{,}6-0{,}7041*9{,}2 = \mathbf{-1{,}8776}$$

$$Y^* = a + bX \qquad \mathbf{Y^* = -1{,}8776 + 0{,}7041X}$$

Verifica per accertare che la retta di regressione passi per il baricentro

$$Y^* = -1{,}8776 + 0{,}7041X = -1{,}8776 + 0{,}7041*9{,}2 = 4{,}6$$

Ulteriori espressioni per il calcolo del parametro b.

x	y	xy	x^2
4	1	4	16
7	3	21	49
10	5	50	100
11	6	66	121
14	8	112	196
46	23	253	482

$\mu_x = 9{,}2$

$\mu_y = 4{,}6$

$(X-\mu)$	$(Y-\mu)$	$(X-\mu)*(Y-\mu)$	$(X-\mu)^2$
-5,2	-3,6	18,72	27,04
-2,2	-1,6	3,52	4,84
0,8	0,4	0,32	0,64
1,8	1,4	2,52	3,24
4,8	3,4	16,32	23,04
0,0	0,0	41,4	58,8

$$\mathbf{b} = \frac{\sum(X-\mu)*(Y-\mu)}{\sum(X-\mu)^2} = \frac{41{,}4000}{58{,}8000} = \mathbf{0{,}7041}$$

$$\mathbf{b} = \frac{Cov\,(X,Y)}{Var\,(X)} = \frac{\sum(XY)/n-(\mu_x*\mu_y)}{\sum X^2/n-(\mu_x)^2} = \frac{253 / 5 - 9{,}20 * 4{,}60}{482 / 5 - 84{,}64} = \frac{8{,}280}{11{,}760} = \mathbf{0{,}7041}$$

Una volta scelta la funzione da adattare alla distribuzione empirica e i relativi parametri, l'esigenza che si pone è quella di valutare il **grado di affidabilità del modello.** Si rende opportuno cioè misurare la **dispersione** dei dati osservati intorno alla retta prescelta.

Tra i diversi indici elaborati vi è in particolare l'**indice di determinazione lineare**. Si tratta di un indice che esprime la **bontà di accostamento** della retta di regressione alla nuvola di punti osservati.

In formula: $$R^2 = 1 - \frac{\sum (y-y^*)^2}{\sum (y-\mu_y)^2} \qquad 0 < R^2 < 1$$

Quando l'indice di determinazione lineare è uguale a zero significa che la variabilità dei valori di Y non risulta spiegata dalla regressione. Quando vale 1 tutti i punti sperimentali giacciono sulla retta di regressione, per cui la regressione spiega una gran parte della variabilità dei valori di Y e quindi il modello di regressione è appropriato per descrivere l'associazione tra le variabili.

Esempio di calcolo dell'indice di determinazione R^2

x	y		y*	y-y*	$(y-y^*)^2$	$(y-\mu_y)^2$
0	800		800	0	0	112.225
1	980	y*=800+134x	934	46	2.116	24.025
2	1.040		1.068	-28	784	9.025
3	1.200	$\mu_y =$ 1.135	1.202	-2	4	4.225
4	1.240		1.336	-96	9.216	11.025
5	1.550		1.470	80	6.400	172.225
	6.810		6.810	0	18.520	332.750

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y - y^*)^2}{\sum (y - \mu_y)^2} = 1 - \frac{18.520}{332.750} = 1 - 0{,}0557 = 0{,}9443$$

Il risultato evidenzia un ottimo accostamento.

Va altresì sottolineato che nel metodo dei minimi quadrati applicato al modello di regressione lineare semplice, la somma dei dati osservati è sempre uguale a quella dei dati teorici.

Nell'analisi statistica di una distribuzione doppia di caratteri entrambi quantitativi, una trattazione a parte è dedicata allo studio di una particolare relazione: l'**interdipendenza**.

Per misurare la correlazione tra due variabili è necessario fare riferimento alla **covarianza** fra X e Y (varianza congiunta) la cui espressione è:

$$Cov(X,Y) = \sigma_{xy} = \frac{\sum (x - \mu_x)(y - \mu_y)}{n}$$

La **covarianza** è una misura della contemporanea variazione di due caratteri X e Y, che oltre a descrivere la dispersione delle variabili, esprime anche la relazione tra loro.

Il suo segno, a differenza di quello della varianza che è sempre positivo, può essere positivo o negativo, a seconda che la relazione tra le due variabili sia, rispettivamente, **diretta** (ci sia cioè **concordanza**), o **inversa** (se vi è **discordanza**). Il numeratore della covarianza, indicato con Cod(X,Y), è denominato **codevianza**.

La **covarianza** rappresenta il numeratore di una misura del grado di dipendenza lineare tra le due variabili molto utilizzato, ovvero il **coefficiente di correlazione lineare di Bravais-Pearson**, la cui espressione è:

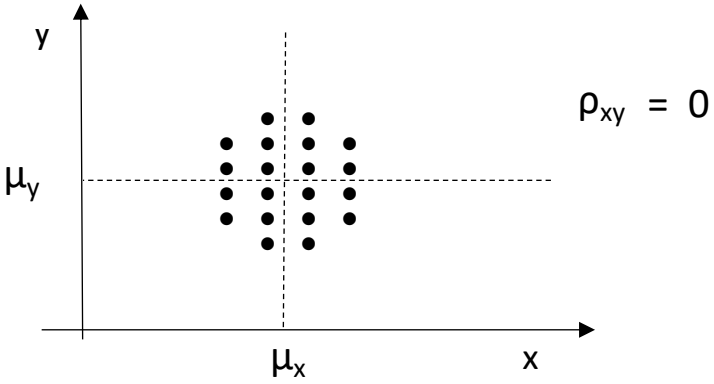
$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum (x - \mu_x) * (y - \mu_y)}{\sqrt{\sum (x - \mu_x)^2} * \sqrt{\sum (y - \mu_y)^2}} \; ;$$

σ_x e σ_y sono lo scarto quadratico medio, rispettivamente della variabile X e della variabile Y.

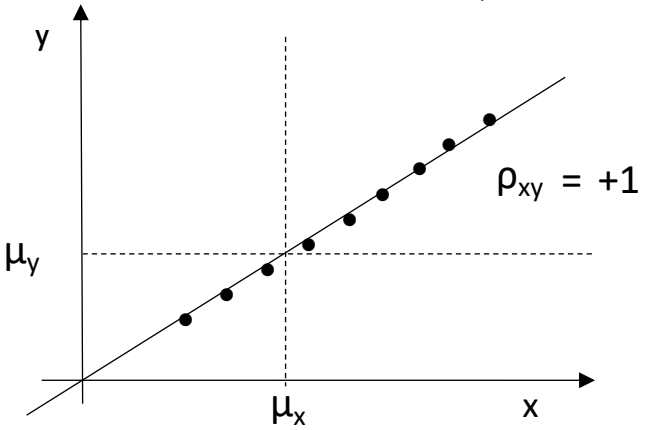
Il **coefficiente di correlazione** è un valore che non dipende dall'unità di misura delle X o delle Y ed è compreso tra -1 e +1 :

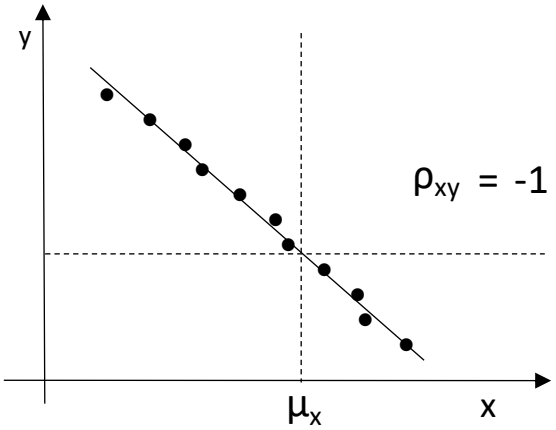
$$-1 \leq \rho_{xy} \leq +1$$

- se $\rho_{xy} = 0$ non esiste tra i due caratteri una relazione di tipo lineare (sono **linearmente incorrelati)**.



- se $\rho_{xy} = \pm 1$ esiste, tra i due caratteri, un **legame lineare perfetto di tipo concorde** ($\rho_{xy} = +1$) o un **legame lineare perfetto di tipo discorde** ($\rho_{xy} = -1$).





- per $\rho_{xy} > 0$ oppure < 0 tra i due caratteri vi è un **legame lineare di tipo concorde** o **di tipo discorde** non perfetto il cui grado è misurato dal valore assunto del coefficiente. Se ρ_{xy} assume un valore elevato pur in assenza di relazione tra le variabili si dice che esiste una **correlazione spuria**.

Il **coefficiente di correlazione lineare di Bravais-Pearson**, può essere espresso anche come:

$$\rho_{xy} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2} * \sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}$$

Riassumendo: il **coefficiente di correlazione lineare di Bravais-Pearson ρ_{xy}** è un indice della linearità della relazione fra le variabili X e Y che da la misurare della forza, o intensità, del legame che le unisce. Valori di ρ_x vicini a +1 o -1 indicano un'elevata linearità della relazione, quindi l'interpolazione lineare fornisce un'ottima approssimazione. Viceversa, valori di ρ_{xy} vicini allo 0 indicano indipendenza tra X e Y oppure una relazione non lineare. Inoltre, come si è visto, se il coefficiente è positivo, Y tende ad aumentare con X e l'inclinazione della retta dei minimi quadrati è positiva, mentre se il coefficiente è negativo Y tende a diminuire all'aumentare di X e l'inclinazione della retta è negativa.
Si dimostra che il **coefficiente di correlazione lineare di Bravais-Pearson**, è pari alla radice quadrata dell'indice di determanazione lineare, in simboli:

$$\rho_{xy} = \pm \sqrt{R^2}$$

Poiché ρ_{xy} assume valori fra +1 e -1 e R^2 assume valori fra 0 e +1, tanto più R^2 è prossimo a +1, tanto migliore sarà la rappresentazione di Y tramite le retta di regressione. E' evidente che se $R^2 = 1$ (cioè $\rho_{xy} = \pm 1$), allora Y è linearmente dipendente da X ed esiste una regressione lineare perfetta (o correlazione lineare perfetta). La retta è quindi in grado di rappresentare perfettamente Y.

Esempio di calcolo dell'indice di determinazione R^2 e di ρ_{xy}

x	y	y*
0	800	800
1	980	934
2	1.040	1.068
3	1.200	1.202
4	1.240	1.336
5	1.550	1.470
15	6.810	6.810

y-y*	$(y-y^*)^2$	$(y-\mu_y)^2$	x^2	y^2	xy
0	0	112.225	0	640.000	0
46	2.116	24.025	1	960.400	980
-28	784	9.025	4	1.081.600	2.080
-2	4	4.225	9	1.440.000	3.600
-96	9.216	11.025	16	1.537.600	4.960
80	6.400	172.225	25	2.402.500	7.750
0	18.520	332.750	55	8.062.100	19.370

$\mu_y = 1.135$ $\qquad$ $y^*=800+134x$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y-y^*)^2}{\sum (y-\mu_y)^2} = 1 - \frac{18.520}{332.750} = 1 - 0{,}0557 = 0{,}9443$$

$$\rho_{xy} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2} * \sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}} = \frac{6*19.370 - 15*6.810}{\sqrt{6*55 - (15)^2} * \sqrt{6*8.062.100 - (6.810)^2}} =$$

$$= \frac{116.220 - 102.150}{\sqrt{330 - 225} * \sqrt{48.372.600 - 46.376.100}} = \frac{14.070}{14.478{,}691} = 0{,}9718$$

Il risultato fa rilevare una correlazione diretta tra le due variabili.

Si dimostra anche che:

$$\rho_{xy} = \pm \sqrt{R^2} = \pm \sqrt{0{,}9443} = 0{,}9718$$

Altri esempi di calcolo dell'indice di determinazione di ρ_{xy}

x	y
0	0
1	20
2	40
3	60
4	80
5	100
15	300

x^2	y^2	xy
0	0	0
1	400	20
4	1.600	80
9	3.600	180
16	6.400	320
25	10.000	500
55	22.000	1.100

$$\rho_{xy} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2} * \sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}} = \frac{6*1.100 - 15*300}{\sqrt{6*55 - (15)^2} * \sqrt{6*22.000 - (300)^2}} =$$

$$= \frac{6.600 - 4.500}{\sqrt{330 - 225} * \sqrt{132.000 - 90.000}} = \frac{2.100}{2.100} = \mathbf{1{,}000}$$

x	y
0	250
1	800
2	5
3	0
4	60
5	0
15	1.115

x^2	y^2	xy
0	62.500	0
1	640.000	800
4	25	10
9	0	0
16	3.600	240
25	0	0
55	706.125	1.050

$$\rho_{xy} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2} * \sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}} = \frac{6 * 1.050 - 15 * 1.115}{\sqrt{6 * 55 - 225} * \sqrt{6 * 706.125 - 1.243.225}}$$

$$= \frac{6.300 - 16.725}{\sqrt{330 - 225} * \sqrt{4.236.750 - 1.243.225}} = \frac{-10.425}{17.729,1} = -0,588$$